

Метод на подобните тела за решаване на правата гравитационна и магнитна задача

П. Ставрев

Висш минногеоложки институт, 1156 София

P. Stavrev — The method of similar bodies in the solution of the direct gravity and magnetic problem. Algorithms for numerical solution of the direct problem are discussed on the basis of similar transformations of anomalous fields. Geological objects of arbitrary form and density or magnetic distribution are approximated by elementary bodies, similar to each other. The anomalies of these bodies are likewise similar. This facilitates the computation process since the anomaly of a basis body may be tabulated. The anomalous effect of the other elementary bodies is obtained through multiplication by the tabulated values of the coefficient, depending on the position and the density of the body.

Bodies which create anomalies with a particular point may be used as basis bodies. In case of more complex distribution of masses and dipoles diagrams of similar elements — (two-dimensional problem) are proposed to describe the density and magnetic sections. A concrete problem is solved — determination of the gravity effect caused by beds of variable density in the upper part of the section of Dolna Kamcija marginal depression.

При решаването на правата гравитационна или магнитна задача в случаите на сложни по форма и разпределение на плътността геоложки обекти се прибегва обикновено до апроксимация на плътностните нееднородности към набор от елементарни тела с правилна форма и с постоянна или линейно изменяща се плътност. Гравитационният и магнитният ефект на повечето от удобните по форма елементарни тела се изразяват с многочленни формули или пряко с интеграли, подлежащи на числено решаване (Старостенко, 1978; Талвани, 1973). Това значително утежнява и удължава изчислителния процес. В настоящата статия се предлага метод за числено решаване на правата задача, основан на подобно преобразуване на аномалното поле, при който елементарните тела се вземат подобни едно на друго. Аномалиите на такива тела също са подобни, поради което за изчисляването на аномалния ефект е достатъчно да се разполага с аномалната крива на едно само елементарно тяло.

Подобно преобразуване на аномалното поле. Подобното преобразование $A'(P')$ на аномалията $A(P)$ от хомогенно тяло се определя с изрази (Старев, 1981)

$$(1) \quad A'(x', y', z', \{x'_0, y'_0, z'_0\}, \mu') = t^{m+s-k} A(x, y, z, \{x_0, y_0, z_0\}, \mu),$$

където x, y, z са координатите на точките P , в които са зададени стойностите на аномалията A ; $\{x_0, y_0, z_0\}$ е множеството координати на точките M , при-

надлежащи на смущаващото тяло T ; μ — големината на плътността, намагнитеността, количеството маса или магнитен момент; t — геометричната константа за подобие; $x' = tx$, $y' = ty$, $z' = tz$ са координатите на точките P' , в които се определя подобното преобразование A' ; $x'_0 = tx_0$, $y'_0 = ty_0$, $z'_0 = tz_0$ — координатите на точките M' , принадлежащи на тялото T' , което се получава от тялото T с константа за подобие t ; $\mu' = t^m \mu$ е плътността или намагнитеността на подобното тяло T' , t^m — съответната константа за подобие; s — число, зависещо от вида на разпределението на смущаващите маси или диполи: $s=2$ за обемни маси, $s=1$ за прост слой и обемни диполи, $s=0$ за двоен слой и линейни маси, $s=-1$ за точкови маси и линейни диполи, $s=-2$ за дискретни диполи; k е число, равно на реда на аномалията A като производна на гравитационния или магнитния потенциал.

За аномалиите от тела с правилна форма изразът (1) има по-конкретно вида

$$(2) \quad A'(x', y', z', r'_1, \dots, r'_j, q_1, \dots, q_j, \mu') = t^{m+s-k} A(x, y, z, r_1, \dots, r_l, q_1, \dots, q_l, \mu).$$

Тук r са размерни величини, като координати на особени точки или ширина, дължина, дълбочина и др.; q — безразмерни величини, като ъгли на наклона, съотношения на размери и др. При подобните преобразования се променят само размерните величини, а безразмерните остават постоянни.

Ако са известни стойностите на аномалията $A(P)$, предизвикана от тяло T , то стойностите на аномалиите $A'(P')$ от подобните тела T' се определят съгласно (1), като $A(P)$ се умножи на коефициента t^{m+s-k} . Следователно при условие, че се изчисли предварително аномалното поле на едно базисно тяло T , по прост начин може да се намери аномалният ефект на кое да е подобно тяло T' .

Изчисляване на аномалиите от множество тела с проста форма. С най-проста форма се характеризират телата, чиито аномални полета имат една особена точка. Такива тела са сферата, хоризонталният кръгов цилиндър с безкрайна дължина, тънкият, неограничен в дълбочина пласт, хоризонталната материална полуравнина, тънки стълбообразни тела с голяма дълбочина на долната граница, контакт в хоризонтален слой с голяма мощност и др. С помощта на набор от такива тела може да се представи приблизително какво да е разпределение на смущаващи маси или диполи.

Аналитичният израз на аномалиите от тези тела може да се даде в следната обща форма:

$$(3) \quad A = \mu(w-z)^{s-k} R\left(\frac{u-x}{w-z}, \frac{v-y}{w-z}, \alpha, \beta\right),$$

където u , v , w са координатите на особената точка; α , β — ъглите, определящи наклона на тялото (пласт, прът) или наклона на намагнитеността (сфера, цилиндър, полуравнина), или разликата в наклоните на тялото и намагнитеността (пласт, контакт); $(w-z)$ — величината, избрана за мярка на дължините; R — функция на безразмерните аргументи:

$$(4) \quad \frac{u-x}{w-z} = q_1; \quad \frac{v-y}{w-z} = q_2; \quad \alpha = q_3; \quad \beta = q_4.$$

Функцията R представя относителния вид на аномалията A и се определя въз основа на свойствата на гравитационните и магнитните аномалии като хомогенни функции.

При подобните преобразования аргументите на R се запазват непроменени. Ако се знаят стойностите на R за множество стойности на аргументите q , то изчисляването на $A'(x', y', z')$ от кое да е тяло с параметри $u', v', w', \alpha, \beta$ се свежда до умножаване на $R(q'_1, q'_2, \alpha, \beta)$ с конкретните стойности на μ' и $(w-z)^{s-k}$. Тази възможност за решаване на правата задача е прилагана в нейната графична или таблична форма (М и к о в, 1956; К о л ю б а к и н и др., 1960). Тя може да се реализира с изгода и при използването на ЕИМ.

Например вертикалната съставляваща Z на напрегнатостта на магнитното поле от хоризонтален кръгов цилиндър с координати на оста u, w и магнитен момент на единица дължина m_0 под наклон φ се изчислява по известната формула

$$(5) \quad Z(x, z) = 2m_0 \frac{\{(w-z)^2 - (u-x)^2\} \sin \varphi - 2(w-z)(u-x) \cos \varphi}{\{(u-x)^2 + (w-z)^2\}^2}$$

Подобното преобразование на Z съгласно уравнения (2), (3) и (4) се представя във вида

$$(6) \quad Z(x, z) = t^{m-2} Z(x, z) = 2m_0'(w' - z')^{-2} R(q, \varphi),$$

където $q = \frac{u' - x'}{w' - z'}; R(q, \varphi) = \frac{(1 - q^2) \sin \varphi - 2q \cos \varphi}{(1 + q^2)^2}$.

За сравняване ефективността на алгоритмите, основани на формулите (5) и (6), се извърши моделно изследване с ЕИМ. Резултатите показват, че във втория случай необходимото за решаване на правата задача машинно време е по-малко. Ефектът е толкова по-чувствителен, колкото повече са смущаващите тела и изчислителните точки. В конкретния пример на аномалия Z от 100 цилиндъра в 100 изчислителни точки прилагането на формула (6) позволява да се намали машинното време с 30% при удовлетворителна точност на резултата. Използуван е табличен масив за R с дължина 200 члена, със стъпка на аргумента $\Delta q = 0,05$, без интерполация. Максималната относителна грешка на изчислените стойности Z е 0,02%.

Изчисляване аномалното поле на плътностен или магнитен разрез (двумерна задача). Плътностните или магнитните разрези се състоят от едно или няколко обособени по геоложки признаци тела с произволна форма и разпределение на физическия параметър. За решаването на правата задача в този случай са разработени ред графични, таблични и аналитични методи. В някои от методите разрезът се поделя на елементи с равен ефект в изчислителната точка (например диаграмите на М и к о в, 1956), а при други елементите са равни, имат някои равни параметри или са подходящ набор от тела с правилна форма (Л о м т а д з е, 1968; С т а р о с т е н к о, 1973; В о т е з а т u et al., 1973). В първия случай за всяка изчислителна точка се налага едно ново представяне на разреза като сума от елементи, което усложнява програмния алгоритъм за ЕИМ. Във втория случай е нужно да се пресмята полето на всеки елемент по аналитичния израз, което удължава изчислителното време. Разработени са и методи за решаване на задачата при предположението, че физическият параметър се изменя линейно (С т а р о с т е н к о, 1973, и др.). В тези случаи е необходимо прецизно поделяне на разреза на елементи, удовлетворяващи условията на метода както по отношение на геометрията, така и на изменението на плътността или намагнитеността.

Методът на подобните тела позволява разрезът да се подели на фиксирани елементи с пропорционално действие. Едно от удобните елементарни

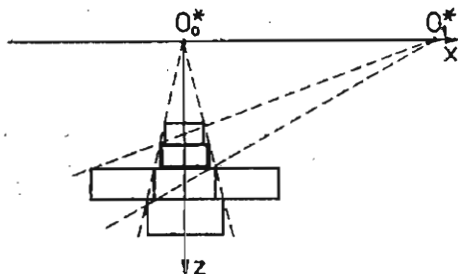
тела, чрез подобно преобразуване на което може да се запълни пълно цялото долно полупространство, е призмата с нормално сечение, имащо формата на паралелограм с хоризонтално разположени горна и долна страна. Тази форма се задава с координатите на ъгловите точки или с друг набор от величини, примерно координатите a , c на средната точка на горната страна, хоризонталния размер $2b$, вертикалния размер $2l$ и ъгъла на наклона α . Общият аналитичен израз на аномалиите от разглежданото тяло може да се представи подобно на (3) в следния вид:

$$(7) \quad A(x, z) = \mu(c - z)^{s-k} R\left(\frac{a-x}{c-z}, \frac{b}{c-z}, \frac{l}{c-z}, \alpha\right).$$

Облекчаване на изчислителния процес чрез табулиране на относителната форма R в горния израз може да се постигне само ако таблицата не е многомерна и многочленна. Целесъобразно е пресмятането на едномерна таблица R с аргумент $q = (a-x)/(c-z)$, параметри $p_1 = b/(c-z)$, $p_2 = l/(c-z)$ и наклон α . Тогава аномалията на кое да е от подобните тела с параметри p_1 , p_2 и α в точка с относителна координата q' се получава по формулата

$$(8) \quad A'(x', z') = \mu'(c' - z')^{s-k} R(q').$$

За реализирането на този алгоритъм е необходимо да се построи диаграма от подобни елементи, с която да се извършва описанието на разреза. Главен елемент на диаграмата е едно базисно тяло, задавано с координати $a=0$, $c=h_0$ и параметри p_1 , p_2 , α . Получаването на елементи, подобни на базисния, се извършва от центрове на подобие O^* , разположени по хоризонталната ос x (фиг. 1). От точка $O^*(0,0)$ се образува вертикална колона от подобни елементи. Те се номерират спрямо базисния елемент, като елементите под него получават последователно номера $1, 2, \dots, j, \dots$, а над него — номера $-1, -2, \dots, -j, \dots$. Константата за подобие t , с която всеки елемент на вертикалната колона се образува от базисния, тогава е $t_{\pm j} = (1 + 2p_2)^{\pm j}$. За хоризонтално попълване на диаграмата, примерно на реда с номер $j=1$, се търси център O_1^* , така че лявата вертикална страна на преобразувания елемент да съвпадне с дясната вертикална страна на елемента под базисния (фиг. 1). Константата за подобие при това е $t_1 = 1 + 2p_2$ и следователно образуваният елемент е равен на съседния отляво. Третият еле-

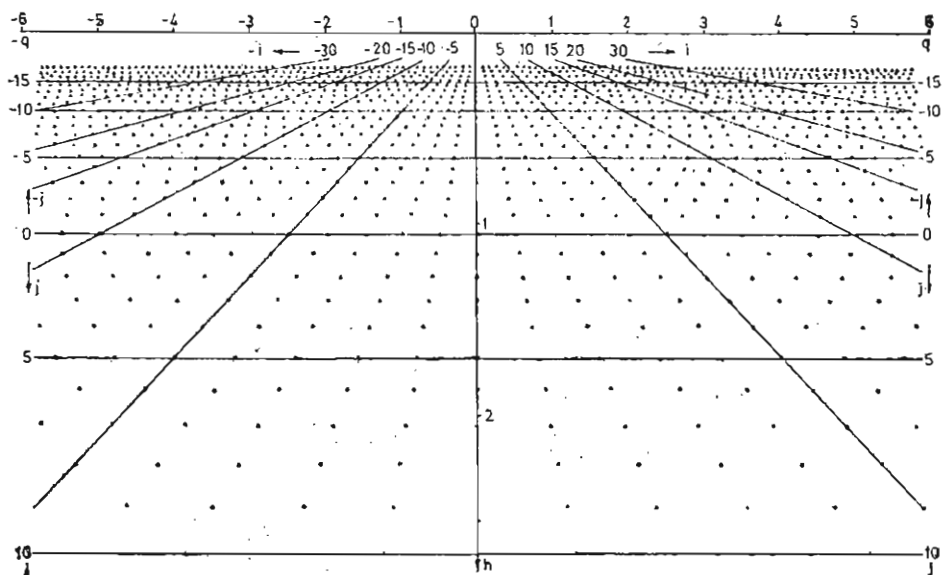


Фиг. 1. Построяване на елементи, подобни на базисния елемент (означен с удебелен контур)

мент от същата редица е равен на втория и т. н. Аналогично се попълват и останалите редове. Получава се диаграма, всеки ред на която се състои от еднакви по големина елементи. Номерацията на елементите в реда се прави спрямо елемента от вертикалната колона — надясно номера $1, 2, \dots$,

i, \dots , а наляво — $1, -2, \dots, -i, \dots$. Базисният елемент има номер в реда $j=0$ и номер в колоната $i=0$.

За да може с една диаграма да се решава задачата за разрези в различен мащаб, по хоризонталната ос се нанасят относителните абсиси q



Фиг. 2. Точкова диаграма на подобни елементи с параметри $p_1=0,25$, $p_2=0,10$, $\alpha=90^\circ$ (отношение на хоризонталния и вертикалния мащаб 1:2,5)

$=x/h_0$, а по вертикалната ос — относителните дълбочини $h=c/h_0$. В тази система базисният елемент има координати $q=0$, $h=1$. Останалите елементи на диаграмата се получават, като се построят хоризонтални линии с уравнение $h_{\pm j}=(1+2p_2)^{\pm j}$ и се пресекат с радиални линии с уравнение $q_{\pm i}=(1+2i)p_1h$, за да се получат десните (+) или левите (-) горни ъглови точки на елементите с номер i от всеки ред с номер j .

Вместо площни елементи по-практично е да се изобразят само техните средни точки. Уравненията, с които се определят геометричните центрове на правоъгълните елементи, са

$$(9) \quad q_{\pm i} = 2ip_1(1+2p_2)^{\pm j}; \quad h_{\pm j} = (1+p_2)(1+2p_2)^{\pm j}.$$

По този начин е построена диаграмата на фиг. 2 при съотношение на вертикалния и хоризонталния мащаб 1 : 2,5.

Изчисляване на аномалиите Δg . Аномалията Δg на хомогенна призма с безкрайна дължина и правоъгълно сечение се дава с израз

$$\Delta g = G\rho \left| (u-x) \ln [(u-x)^2 + (w-z)^2] + 2(w-z) \arctg \frac{u-x}{w-z} \right| \frac{u_2, w_2}{u_1, w_1},$$

където G е гравитационната константа; ρ — плътността на призмата; u_1 , w_1 са координатите на горната лява ъглова точка на сечението, а u_2 , w_2 — координатите на долната дясна точка. За базисния елемент на диаграмата с параметри p_1 , p_2 и $\alpha=0$ и координати на ъгловите точки $u_2=-u_1=b$, $w_1=h_0$, $w_2=h_0+2l$ аномалията Δg , представена във вида (7), има израз

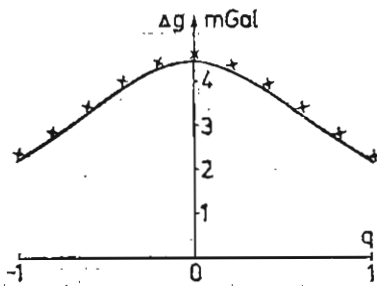
$$\Delta g(q, 0) = G\rho h_0 R(q; p_1, p_2),$$

където $q = x/h_0$, $p_1 = b/h_0$, $p_2 = l/h_0$,

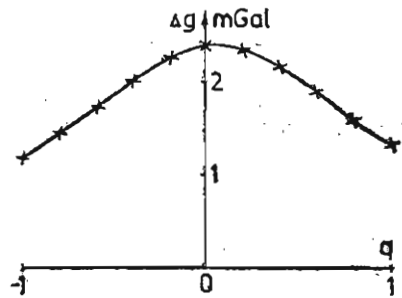
$$R = (p_1 - q) \ln \frac{(p_1 - q)^2 + (1 + 2p_2)^2}{1 + (p_1 - q)^2} + (p_1 + q) \ln \frac{(p_1 + q)^2 + (1 + 2p_2)^2}{1 + (p_1 + q)^2} + 2(1 + 2p_2) \left(\operatorname{arctg} \frac{p_1 - q}{1 + 2p_2} + \operatorname{arctg} \frac{p_1 + q}{1 + 2p_2} \right) - 2[\operatorname{arctg} (p_1 - q) + \operatorname{arctg} (p_1 + q)].$$

По горния израз се изчислява предварително таблицата $R(q)$ със зададена стъпка Δq . Построеният плътностен разрез с изчислителния профил се налага върху диаграмата от подобни елементи, като се следи хоризонталните оси на двата чертежа да съвпадат. По оста q на диаграмата се определят координатите на изчислителните точки $(q_p, 0)$. За всеки елемент, попадащ в сечението на аномалообразуващите тела, се снемат номерата i, j и плътността ρ' в средната точка. От уравнение (9) по данните за i и j се намират координатите на елементите q_e, h_e , след което съгласно уравнение (8) се изчислява аномалният ефект на всеки подобен елемент по формулата

$$(10) \quad \Delta g'_{i,j}(q_p, 0) = G\rho' h_0 h_e R\left(\frac{q_e - q_p}{h_e}\right).$$



Фиг. 3. Геометрично приближение на кръгов цилиндър с диаграма от квадратни подобни елементи
плътна линия — теоретични стойности на Δg ; кръстчета — изчислени стойности на Δg



Фиг. 4. Плътностно приближение на правоъгълен многоъгълник с диаграма от подобни елементи
плътна линия — теоретични стойности на Δg ; кръстчета — изчислени стойности на Δg ; стрелка — градиент на плътността

Ще отбележим, че с диаграмата от подобни елементи се прави еднократно описание на разреза. Изчисленията се извършват с ЕИМ.

Точността и бързината на изчисленията по метода на подобните тела зависят от стойностите и отношенията на параметрите p_1, p_2, α и от стъпката,

дължината и приложената интерполация на таблицата R. При малки стойности на p_1 и p_2 елементарните тела са с малки размери, което позволява по-добра геометрична и плътностна апроксимация на разреза, но броят на елементите за описание на разреза в по-горните му части става твърде голям. Отношението на параметрите p_1 и p_2 трябва да се подбира съобразно отношението на вертикалния и хоризонталния градиент на плътностите, а ъгълът α — така, че елементите да се разполагат нормално на пълния градиент на плътността. Таблицата R следва да се попълни до стойности на аргумента q не по-малки от 20 при стъпка Δq между 0,05 и 0,1. При по-голяма стъпка се налага ползуването на таблицата да става с интерполация.

Представа за качеството на геометричната апроксимация с диаграма от подобни елементи може да се получи от модела, показан на фиг. 3. Използвана е диаграма от квадратни елементи с параметри $p_1=p_2=0,05$ и таблица R със стъпка 0,05, без интерполация. Относителната грешка на изчислената аномалия Δg спрямо амплитудата на теоретичната аномалия не надхвърля 3%.

За оценка на плътностната апроксимация е изчислена аномалията Δg от тяло с променлива плътност и със сечение, което точно се изпълва от квадратни подобни елементи с параметри $p_1=p_2=0,05$ (фиг. 4). Сравняването на изчислените и теоретичните аномалии при три стойности на плътностния градиент, избрани така, че в границите на базисния елемент плътността да нараства с 0,001, 0,01 и 0,1 g/cm³, показва, че относителната грешка не надхвърля съответно 0,5, 0,7 и 1,1%.

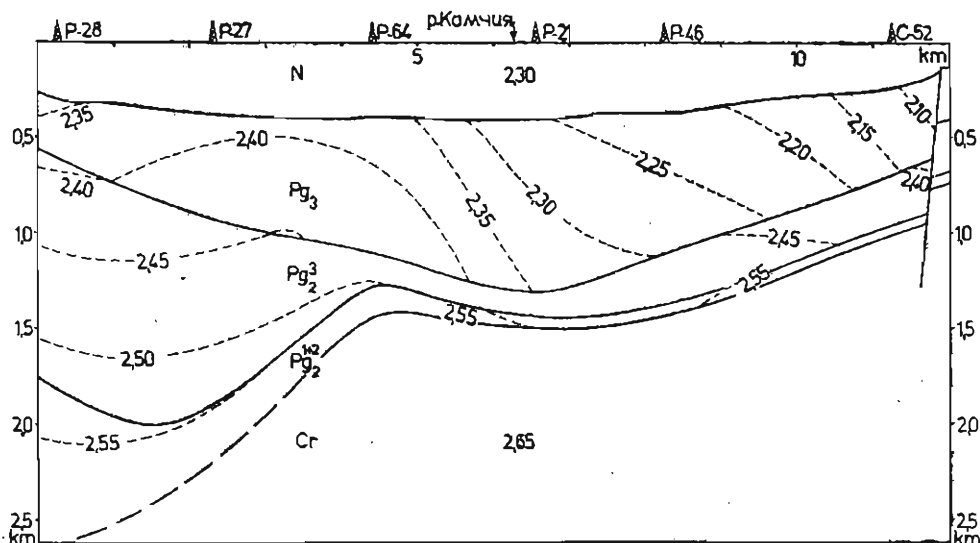
Изчисляване на магнитните аномалии Z и H. В случая на магнитен разрез правата задача се решава, както за плътностен разрез, с прилагане на произтичащите от теоремата на Поасон връзки между елементите на магнитното и гравитационното поле:

$$Z = \frac{J}{G\rho} (V_{xz} \cos \varphi + V_{zz} \sin \varphi); H = \frac{J}{G\rho} (V_{xz} \sin \varphi - V_{zz} \cos \varphi),$$

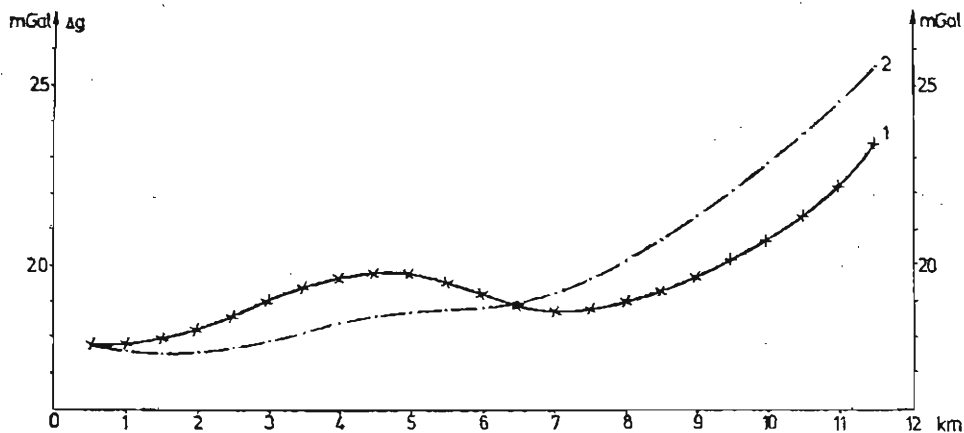
където J е намагнитеността под наклон φ ; V — гравитационният потенциал. За изчисляването на Z и H се ползува същата диаграма от подобни елементи, при което е необходимо да се пресметнат предварително две таблици за величините V_{xz} и V_{zz} .

Аномалия Δg на плътностен разрез в Долнокамчийското ръбно понижение. Предлаганият метод е изпробван за изчисляване на аномалния гравитационен ефект от горната част на разреза в Долнокамчийското понижение. Подбран е напречен на оста на понижението профил, минаващ по линията, свързваща сондажите P-28 и C-52. От измерванията на плътността на ядки от множество прокарани тук сондажи е установено, че средните плътности на горните слоеве от седиментната покривка претърпяват значителни изменения (Добрев, 1968; Дюлапчиева и др., 1981). За утайките с олигоценска възраст средната плътност, изразена в g/cm³, се мени от 2,10 до 2,42, за горния еоцен — от 2,41 до 2,50, а за долния и средния еоцен измененията са по-малки — от 2,54 до 2,57. По-дълбоките кредни седименти имат плътност около 2,65. Изследванията показват (Дюлапчиева и др., 1976, ГИ на БАН), че освен хоризонтален градиент на плътностите тук се проявява и вертикален градиент, който за олигоценските утайки по разглеждания профил е приблизително 0,1 (g/cm³)/km, за горния еоцен — 0,11 (g/cm³)/km, а за долния и средния еоцен — 0,1 (g/cm³)/km. По тези данни е съставен вертикален плътностен разрез на Долнокамчийското ръбно понижение до дълбочина 2600 m (фиг. 5). Описанието на

разреза е извършено с диаграмата, показана на фиг. 2, след което със съставена по алгоритъм, произтичащ от формула (10), програма за ЕИМ е изчислена аномалната крива Δg , показана на фиг. 6. За оценка на резултата е изчислена и аномалията Δg при постоянна плътност на отделните слоеве,



Фиг. 5. Вертикално сечение на плътностите по линията P-28 — S-52 в Долнокамчийското понижение (геоложки профил по И. Н. Головацкий и М. В. Худък)



Фиг. 6. Изчислени криви на аномалиите Δg по линията P-28 — S-52 в Долнокамчийското понижение

1 — аномалия на сечението с променливи плътности, построено от фиг. 5; 2 — аномалия при постоянни плътности в слоевете на сечението

равна на средната им плътност (фиг. 6). Както се вижда, неотчитането на хоризонталния и вертикалния градиент на плътностите в отделните слоеве може да доведе в конкретния случай до значителни деформации на аномал-

ната крива и грешки в изчисления ефект до 2 mGal. Тази грешка е около 10% от измерената амплитуда на гравитационната аномалия в района на Долнокамчийското ръбно понижение.

Л и т е р а т у р а

- Добрев, Т. 1968. Плътносна характеристика на скалите в България. — *Научни трудове на ВМГИ, т. 11, ч. 11*, 991—1018.
- Долапчиева, М., Цв. Велчев. 1981. Плътносна характеристика на седиментната покривка в Северна България. — *Бълг. геоф. сп.*, 7, 4, 83—94.
- Колубакин, В., М. Лапина. 1960. Обзор способов решения прямой и обратной задач магнитной разведки. — *Труды ИФЗ АН СССР, 13 (180)*. 356 с.
- Ломтадзе, В. 1968. Интерпретация гравитационных аномалий способом эквивалентных призм. — *Вопросы разв. геоф.*, 8, 36—40.
- Миков, Д. 1956. *Атлас теоретических кривых для интерпретации магнитных и гравитационных аномалий*. Томск, ГТТИ. 15 с.
- Ставрев, П. 1981. Подобни преобразования на гравитационните и на магнитните аномалии. — *Бълг. геоф. сп.*, 7, 3, 95—106.
- Старостенко, В. И. 1978. *Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии*. Киев, Наукова думка. 227 с.
- Botzatu, R., M. Visarion, S. Florin, C. Gabriela. 1973. Gravitational attraction of geological structures with variable density. — *Rev. Roum. Geol., Geophys. et Geogr., Ser. Geophys.*, 17, 2, 189—200.
- Talwani, M. 1973. Computer usage in the computation of gravity anomalies. — *Meth. Comp. Phys.*, vol. 13, 343—389.

(Постъпила на 12. I. 1983 г.)